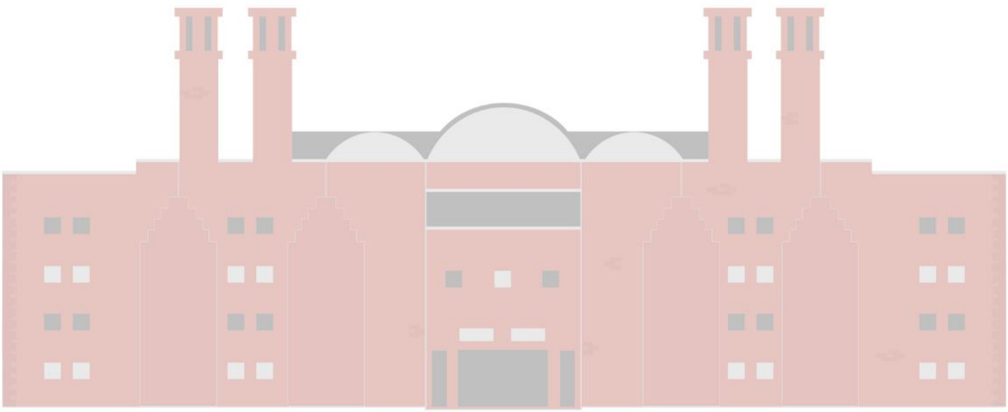
التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الأولى

7 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: ٢٠١٤/٩/٢٣

.:التحليل الشعاعي:.

المشتقات الشعاعية

- إذا قابل كل نقطة $M \in D$ (D منطقة فراغية أو مستوية أو مجال) العدد f(M) فإننا نقول إن f تابع عددي للموضع في D أو حقل عددي.
- و إذا قابل كل نقطة $M \in D$ الشعاع $\vec{F}(M)$, فإننا نقول إن$\vec{F}(M)$ هو تابع شعاعي للموضع أو حقل شعاعي معرف على D.

<u>**وبعبارة اخرى:**</u> الحقل الشعاعي هو مجموعة الأشعة (الواقعة في المستوي أو في الفراغ)

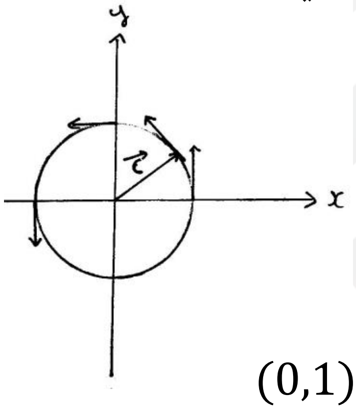
يعرفها تابع شعاعي $\vec{F}(M)$، يقابل كل نقطة $M \in D$ بالشعاع $\vec{F}(M)$ذي مركبتين أو ثلاث

$$\vec{F}(M) = P(M)\hat{\imath} + Q(M)\hat{\jmath} + R(M)\hat{k}$$

فمثلاً: درجة حرارة جسم في لحظة ما هي تابع (حقل) عددي للموضع.

والحقل الكهربائي الساكن أو سرعة جريان سائل متحرك في لحظة ما هي توابع حقول شعاعية

- **مثال:** ليكن لدينا حقل اشعة في $\mathbb{R}^2$ معطى بالعلاقة:



$$\vec{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$$

ارسم بعض اشعته ثم صف هذا الحقل.

الحل: إن مركبات الشعاع في النقطة $(1,0)$ هو $(0,1)$

أي نرسم شعاعاً مبدؤه النقطة ومركباته $(0,1)$ واضح أن هذا الشعاع $\vec{F}$ متعامد مع الشعاع.

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

لأن $\vec{F}.\vec{r} = (-y,x).(x,y) = 0$

كما أن حقل الأشعة $\vec{F}$ يمس الدائرة التي نصف قطرها $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو طول كل شعاع .

• **مثال:** الإحداثي الكروي $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ تابع عددي للموضع

وشعاع الموضع للنقطة $M\ (x,y,z)$:

$\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$ تابع شعاعي للموضع

• **سطوح السوية:** ليكن $u=u(M)$ تابعاً عددياً للموضع في المنطقة الفراغية D.

يمكن في كل نقطة $M\in D$ رسم سطح تكون قيمة u في كل نقطة من نقاطه ثابتة وتساوي قيمة u في M

أي $u=u(M)=c$ يسمى هذا السطح سطح سوية للتابع u عند M.

إن سطح السوية وحيد، لأنه إذا مرَ سطحاً من نقطة وحيدة M لوجدت قيمتان للتابع u عند هذه النقطة وهذا يناقض تعريف التابع .

مثال: سطوح السوية للإحداثي الكروي $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ كرات متحدة المركز ، مركزها O

معادلاتها $x^2+y^2+z^2=c^2$

•• المشتقات الموجهة:

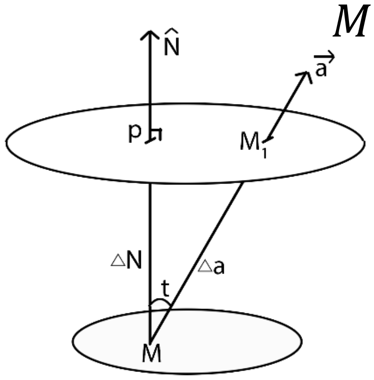
تدرج تابع عددي *Gradient of scalar field* :

ليكن $f=c_1$ سطح سوية مار بالنقطة $M\in D$ و $f+\Delta f=c_2$

سطح سوية آخر مار بالنقطة M_1 (بحيث يكون $\overrightarrow{MM_1}$ ناظم لسطح السوية الثاني) وليكن $\hat{N}$ شعاع واحدة الناظم للسطح الأول و $\hat{a}$ واحدة الناظم للسطح الثاني .

نقيس المسافات على المستقيم MM_1 بالمتحول a: $\overline{MM_1} = \Delta a$

وبالمقابل فإن $\overline{MP} = \Delta N$



اذا اقتربت النقطة M_1 من النقطة M على المستقيم MM_1،

وكانت النهاية $\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta a}$ موجودة، فإنها تسمى مشتق التابع f عند النقطة M وفق الشعاع $\hat{a}$.

وبالمثل إذا اقتربت النقطة P من M على المستقيم MP. ووجدت النهاية:

$\frac{\partial f}{\partial N} = \lim_{\Delta N \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta N}$، فإنها تسمى مشتق التابع f عند M وفق الشعاع $\hat{N}$

-واضح أن عدد المشتقات الموجهة للتابع العددي f في نقطة M غير منته، لأنه يمكن رسم عدد غير منته من أشعة الواحدة في اتجاهات مختلفة في نفس النقطة، ولكل منها جهة معينة.

-إن قيمة (طويلة) المشتق $\frac{\partial f}{\partial N}$ وفق الشعاع $\hat{N}$ هي أكبر قيم المشتقات الموجهة للتابع f في نفس النقطة :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta a}\right) = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta N} \frac{\Delta N}{\Delta a}\right) = \frac{\partial f}{\partial N} cost \ldots\ldots *$$

ولما كان $|cost| \leq 1$ فإن $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial N}\right|$ ويتساويان فقط عندما ينطبق MM_1 على MP أي $\hat{N} \equiv \hat{a}$.

نسمي التابع الشعاعي $\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \hat{N} \frac{\partial f}{\partial N}$ تدرج التابع f عند M.

لما كان التدرج موجود في كل نقطة من نقاط D ، فإننا نسميه تدرج f في D.

• **ملاحظة:** واضح من * أن المشتق $\frac{\partial f}{\partial a}$ وفق الشعاع $\hat{a}$ هو مركبة (مسقط) الشعاع

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \hat{N}\frac{\partial f}{\partial N}$$

على الشعاع التوجيه $\hat{a}$ أي أن:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial N}\cos t = \frac{\partial f}{\partial N}(\hat{N}.\hat{a}) = \hat{a}.\left(\frac{\partial f}{\partial N}\hat{N}\right) = \hat{a}.\vec{\nabla} f \ldots\ldots (2)$$

حيث: $\hat{N}.\hat{a} = |\hat{N}||\hat{a}|\cos t = \cos t$

نسمي المؤثر الاشتقاقي الموجه وفق $\hat{N}$ $\vec{\nabla}: nabla$ مؤثر هاميلتون.

• **تعريف:** إذا كان f تابع عددي معرّف على منطقة D بحيث $f \in c\ell^1(D)$ نسمي تدرج التابع f بأنه الحقل الشعاعي (الشعاع)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

أي: $$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

• **نتيجة:** إذا أثر $\vec{\nabla}$ على تابع عددي للموضع f ، فإنه يشتقه ويوجهه.

_ إذا كانت سطوح السوية $f = c$ ملساء، فإن تدرج f موجود دوماً.

من (2) :

$$\hat{a}.(\vec{\nabla} f) = (\hat{a}.\vec{\nabla})f = \frac{\partial f}{\partial a}$$

أي أن المؤثر الاشتقاقي في $\frac{\partial}{\partial a} = (\hat{a}.\vec{\nabla})$

موجه وفق $\hat{a}$.

فمثلاً: $\frac{\partial}{\partial x} = \hat{\imath}.\vec{\nabla}$ ، أي أن $\frac{\partial f}{\partial x}$ هو المشتق الموجه وفق $\hat{\imath}$ للتابع f.

ملاحظة

يسمى المؤثر $(\vec{a}.\vec{\nabla})$ مؤثر اشتقاقي موَجه وفق الشعاع $\vec{a}$:

$$\vec{a} = a\hat{a} = a_1\hat{\imath}+a_2\hat{\jmath}+a_3\hat{k} \rightarrow \vec{a}.\vec{\nabla} \equiv a(\hat{a}.\vec{\nabla}) \equiv a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}$$

- **خواص:** لما كان تدرج تابع عددي للموضع هو مشتق موَجه ، فينطبق على التدرج نفس خواص الاشتقاق و لكن بتبديل مشتق بتدرج :

$$\vec{\nabla}(f_1 \pm f_2) = \vec{\nabla}f_1 \pm \vec{\nabla}f_2$$

$$\vec{\nabla}(\alpha f) = \alpha\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}(f_1 f_2) = (\vec{\nabla}f_1)f_2 + f_1\vec{\nabla}f_2$$

- **مثال:** عين سطوح السوية للتابع $f = \frac{x^2+y^2}{z}$ في منطقة يُطلب تعيينها ،ثم احسب قيمة أعظم مشتق موِجه لهذا التابع عند النقطة $M_O(1,-1,2)$

الحل:

$$f = \frac{x^2+y^2}{z} = c \Rightarrow Z = \frac{x^2+y^2}{c}$$

وهي مجسمات قطوع مكافئة دورانيه حول OZ

وهي سطوح ملساء فالتدرج موجود دوماً

★ إن قيمة أعظم مشتق موجه عند M_0 هو تدرج f عند M_0

$$\vec{\nabla} f\,|\,M_0 = \hat{\imath}(\frac{2x}{z}) + (\frac{2y}{z})\hat{\jmath} - (\frac{x^2+y^2}{z^2})\hat{k}\,|\,M_0 = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}/2$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$$

العلاقة بين تدرج تابع وتفاضله:

ليكن $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ شعاع الموضع

$$\vec{\nabla} f.\overrightarrow{dr} = (\hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}).(\hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \Rightarrow \vec{\nabla} f.\overrightarrow{dr} = df$$

- **مبرهنة:** إن شعاع التدرج عمودي على سطح السوية $f = c$:

$$\vec{\nabla} f.\overrightarrow{dr} = df = dc = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \perp \overrightarrow{dr}$$

تأثير $\vec{\nabla}$ على تابع للإحداثي الكروي r فقط:

$$f = f(r)$$

أن سطوح السوية $f(r) = c$ هي كرات و منه فأن الناظم $\hat{N}$ منطبق على $\hat{r}$ (شعاع الموضع لنقطة ما من سطح سوية)

$$\vec{\nabla} f = \hat{N}\,\frac{\partial f}{\partial N} = \hat{r}\,\frac{df}{dr}$$

- **مثال:** إذا كان $\vec{r} = r\hat{r}$ شعاع الموضع ..احسب تدرج $f = r^3$ ثم احسب مشتق f الموجه وفق $\vec{r}$

الحل: f يتبع ل r فقط فإن سطوح السويات كرات ، فهي ملساء أي التدرج موجود دوماً

(وهو مشتق f وفق $\hat{r}$)

$$\vec{\nabla} r^3 = \hat{r}\,\frac{d}{dr}r^3 = \hat{r}\,(3r^2) = 3\hat{r}rr = 3r\vec{r}$$

أما مشتق f وفق $\vec{r}$ فهو :

$$\vec{r}\,.\vec{\nabla} f = (\vec{r}.\vec{\nabla})f$$

$$(\vec{r}.\vec{\nabla})f = (\vec{r}.\vec{\nabla})r^3 = \vec{r}.(3r\vec{r}) = 3rr^2 = 3r^3$$

(تابع عددي للموضع)



"السبيل الوحيد للتقدم للأمام هو بتدمير الماضي

شارلوك هولمز